Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Tobias Nipkow, Ph.D.
Lars Hupel

WS 2015/16
13.11.2015
Abgabe bis: 20.11.2015

Perlen der Informatik
4. Übung

Aufgabe G4.1 Spezialfälle von Hilberts zehntem Problem

In der Vorlesung haben wir gesehen, dass es keinen Algorithmus gibt, der für eine beliebige Menge $S = \{p_1(x_1, \dots, x_k) = 0, \dots, p_l(x_1, \dots, x_k) = 0\}$ mit Polynomen $p_1, \dots, p_k$ entscheidet, ob es natürliche Zahlen $x_1, \dots, x_n$ gibt, so dass alle Gleichungen in S gleichzeitig erfüllt sind.

Wir untersuchen jetzt zwei Spezialfälle.

1. Wir betrachten nur Systeme von Gleichungen, in denen die Polynome höchstens quadratisch sind. Zeigen Sie, dass das Problem immer noch unentscheidbar ist.
2. Diesmal betrachten wir nur noch Systeme von Gleichungen mit linearen Polynomen. Zeigen Sie, dass das Problem in diesem Fall entscheidbar ist.

Aufgabe G4.2 Diophantische Gleichungen in $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$

Zeigen Sie, dass sich das Problem der Lösung mehrere Diophantischer Gleichungen in $\mathbb{N}$ auf das Problem der Lösung einer Gleichung in $\mathbb{Z}$ reduzieren lässt (und umgekehrt).

Hinweis: Verwenden Sie hierzu ein Theorem von Lagrange, nach dem jede natürliche Zahl als Summe von vier Quadratzahlen dargestellt werden kann:

$$\forall x \in \mathbb{N}.\ \exists u, v, w, z \in \mathbb{Z}.\ x = u^2 + v^2 + w^2 + z^2$$

Aufgabe H4.1 Diophantische Gleichung mit einer Variablen

Wir betrachten das Problem der Lösung einer Diophantischen Gleichung

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0$$

mit nur einer Variablen (besser bekannt als *Polynom*) in $\mathbb{Z}$.

1. Zeigen Sie, dass es eine Zahl m gibt, so dass $|x| \leq m$ für alle Lösungen der Gleichung gilt.

   Hinweis: Zur Konstruktion von m betrachten Sie das Verhalten des größten Exponenten x^n, nachdem Sie das Polynom normiert haben.
2. Geben Sie ein Entscheidungsverfahren an.
3. Implementieren Sie dieses in einer gängigen Hochsprache Ihrer Wahl.