

Einführung in die theoretische Informatik
Sommersemester 2019 – Übungsblatt 6

AUFGABE 6.1. (*Wichtige Begriffe*)

Stufe A

Überprüfen Sie, dass Sie die Folgenden Begriffe korrekt definieren können.

- Chomsky-Normalform
- mehrdeutig
- inhärent mehrdeutig
- CYK-Algorithmus
- Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen

AUFGABE 6.2. (*Chomsky-Normalform üben*)

Stufe B

Rufen Sie die Website <http://grammar.epfl.ch/> auf und üben Sie das Überführen von Grammatiken in Chomsky-Normalform.

Beachten Sie dabei dass die Website Feedback gibt, ob Ihre Lösung richtig oder falsch ist, aber nicht überprüft ob Sie das Verfahren aus der Vorlesung verwendet haben.

AUFGABE 6.3. (*Mehrdeutigkeit*)

Stufe B

Betrachten Sie die folgende Grammatik G:

S → N-P V-P
N-P → C-N | C-N P-P
V-P → C-V | C-V P-P
P-P → P C-N
C-N → A N
C-V → V | V N-P
A → a | the
N → girl | boy | flower
V → touches | likes | sees
P → with

- (a) Zeigen Sie, dass die Grammatik mehrdeutig ist, indem Sie zwei verschiedene Ableitungen für das folgende Wort angeben:

a girl touches a boy with a flower

- (b) Zeigen Sie, dass die Sprache $L(G)$ endlich ist.
(c) Zeigen Sie, dass es keine endliche Sprache gibt, die inhärent mehrdeutig ist.
(d) Für Programmiersprachen sind mehrdeutige Grammatiken unerwünscht, da jedes Programm nur eine einzige, eindeutige Bedeutung haben soll. Diskutieren Sie anhand den verschiedenen Bedeutungsmöglichkeiten des in Aufgabenteil (a) angegebenen Satzes, warum man natürliche Sprache nur mit mehrdeutigen Grammatiken sinnvoll repräsentieren kann.

AUFGABE 6.4. (*Chomsky-Normalform*)

Stufe C

Die CFG G bestehe aus folgenden Produktionen über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$:

S → ASA | aB
A → B | S | CB
B → b | ε
C → aC
D → aSCb | a

- (a) Beschreiben Sie in eigenen Worten, wann ein Nichtterminal *nützlich* in einer Grammatik ist.
(b) Reduzieren Sie die Grammatik G auf die nützlichen Nichtterminale.
(c) Überführen Sie die reduzierte Grammatik dann in Chomsky-Normalform.
(d) Erklären Sie in eigenen Worten, wie Sie nach Überführen einer Grammatik in CNF überprüfen können, dass Sie keine Fehler gemacht haben.¹

¹Hier geht es nicht um einen formalen Beweis, dass die beiden Sprachen gleich sind, sondern um eine Strategie, wie Sie bei Aufgaben wie im vorherigen Aufgabenteil Fehler vermeiden.

AUFGABE 6.5. (*CYK-Algorithmus*)

Stufe C

Wir betrachten die Grammatik $G = (\{S, T, U, A, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ in CNF mit den folgenden Produktionen P :

$$\begin{array}{ll} S \rightarrow TS \mid CT \mid a & A \rightarrow a \\ T \rightarrow AU \mid TT \mid c & B \rightarrow b \\ U \rightarrow SB \mid AB & C \rightarrow c \end{array}$$

Bestimmen Sie mit dem CYK-Algorithmus, ob $ccaab \in L(G)$ und $aabcc \in L(G)$. Geben Sie dabei auch die berechneten Tabellen an.

AUFGABE 6.6. (*Pumping-Lemma für Kontextfreie Sprachen*)

Stufe C

Wir betrachten Pfeil-Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{\uparrow, \downarrow, \leftarrow, \rightarrow\}$. Wir interpretieren dabei ein Wort $w \in \Sigma^*$ als einen Pfad in einem 2D-Gitter.

- (a) Geben Sie eine formale Definition für die folgenden beiden Sprachen an:
 - (i) Pfade, die in den Ursprung zurückkehren.
 - (ii) Pfade, die „in großer Kurve umkehren“ — *beliebig weit* nach rechts fahren, dann *noch weiter* entweder nach oben oder unten gehen und letztlich wieder umkehren und *noch weiter* nach links fahren. Diese Pfade enden dann links vom Ursprung.
- (b) Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen, dass diese Sprache nicht kontextfrei sind

AUFGABE 6.7.

Stufe D

Sei Σ ein Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$. L ist *präfix-abgeschlossen*, wenn für alle $w \in L$ und $v \in \Sigma^*$ mit $v \triangleleft w$ (also v ist ein Präfix von w) gilt: $v \in L$.

Beweisen Sie, dass jede unendliche, präfix-abgeschlossene, kontextfreie Sprache eine unendliche, reguläre Teilmenge enthält.

AUFGABE 6.8. (*Abschlusseigenschaften kontextfreier Sprachen*)

Stufe D

Beweisen Sie die folgenden beiden Aussagen:

- (a) Der Präfixabschluss $L_{pre} := \{u \mid \exists v. uv \in L\}$ einer kontextfreien Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ über einem Alphabet Σ ist wieder kontextfrei. Geben Sie hierzu eine Übersetzung an, die die Grammatik G für L in eine Grammatik G' umwandelt, sodass $L_{pre} = L(G')$ übersetzt.
- (b) Kontextfreie Sprachen sind unter Schnitt mit regulären Sprachen abgeschlossen.