

**Einführung in die theoretische Informatik**  
Sommersemester 2019 – Übungsblatt 11

**AUFGABE 11.1.** (*Wichtige Begriffe*)

Stufe A

Überprüfen Sie, dass Sie die folgenden Begriffe korrekt definieren können.

- Polynomielle Reduktion  $\leq_p$
- SAT
- 3-KNF-SAT

**AUFGABE 11.2.** (*Quiz*)

Stufe B

Diskutieren Sie die folgenden Aussagen:

- Für jede Sprache, die von einer NTM in polynomieller Zeit akzeptiert werden kann, existiert eine DTM, die ebenfalls die Sprache in polynomieller Zeit akzeptiert.
- $A$  ist NP-schwer  $\rightarrow A \in \mathbf{P}$ .

**AUFGABE 11.3.** (*Einführung polynomielle Reduktion*)

Stufe C

Sie kennen bereits das Problem  $\text{HAMILTON} := \{G \mid G \text{ enthält einen Hamiltonkreis}\}$ . Dieses Problem ist NP-vollständig.

Zeigen Sie nun, dass das Travelling-Salesman-Problem (TSP) ebenfalls NP-vollständig ist.

TSP:

- Eingabe:  $n \times n$  Matrix  $M$  mit  $M_{i,j} \in \mathbb{N}$  und eine Zahl  $k \in \mathbb{N}$ .
- Frage: Gibt es eine "Rundreise" der Länge  $\leq k$ .

Eine Rundreise ist eine Permutation  $\pi$  von  $[1; n]$ , also ein einfacher Kreis, der jede Insel einmal enthält. Die Länge der Rundreise ist die Summe der Kosten der einzelnen Reisen, also  $\sum_{i=1}^n M_{\pi_i, \pi_j}$  (dabei ist  $\pi_i$  der  $i$ -te Eintrag der Permutation, beginnend bei 0, und  $\pi_j$  ist der Eintrag für die nächste Insel, also  $j = (i + 1) \% n$ ).

**AUFGABE 11.4.** (*Abschlusseigenschaften von NP*)

Stufe C

Seien  $A, B \subseteq \Sigma^*$  Sprachen in NP. Zeigen Sie, dass  $A \cap B$  ebenfalls in NP liegt. Geben Sie hierfür an, wie geeignete polynomiell verifizierbare Zertifikate hierfür aussehen.

**AUFGABE 11.5.** (*Wizard of ZOLP*)

Stufe D

Zeigen Sie, dass das Entscheidungsproblem *Zero-One-Linear-Program (ZOLP)* NP-schwer ist. Geben Sie hierzu eine geeignete Reduktion von 3-KNF-SAT auf ZOLP an und beschreiben Sie **zusätzlich** das Vorgehen anhand folgender Formel:

$$(\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$$

**Definition (ZOLP-Entscheidungsproblem)**

**Eingabe:** Ein System von linearen Ungleichungen

$$\begin{aligned} b_1 &\leq a_{1,1}y_1 + \dots + a_{1,n}y_n \\ b_2 &\leq a_{2,1}y_1 + \dots + a_{2,n}y_n \\ &\vdots \\ b_m &\leq a_{m,1}y_1 + \dots + a_{m,n}y_n \end{aligned}$$

mit  $a_{i,j}, b_i \in \mathbb{Z}$  und  $m, n > 0$ .

**Frage:** Gibt es für die Variablen  $y_1, \dots, y_n$  Werte aus  $\{0, 1\}$ , so dass alle Ungleichungen gleichzeitig erfüllt sind?

**AUFGABE 11.6.** (*co-NP*)

Stufe E

Wir definieren co-NP über die Komplemente von Sprachen aus NP.

$$\text{co-NP} = \{L \mid \bar{L} \in \text{NP}\}$$

Eine Sprache  $L$  heißt co-NP-vollständig, falls  $L \in \text{co-NP}$  und für jedes  $L' \in \text{co-NP}$  gilt:  $L' \leq_p L$ .

- Beweisen Sie die folgende Behauptung:

Wenn die Sprache  $L$  NP-vollständig ist, so ist  $\bar{L}$  co-NP-vollständig.

- 
- (b) Sei  $\mathcal{F}$  die Menge aller booleschen Formeln und  $\mathcal{V}$  die Menge aller Variablen. Sei **VALID** die Menge aller Tautologien:

$$\text{VALID} := \{F \in \mathcal{F} \mid \forall \sigma : \mathcal{V} \rightarrow \{0, 1\}. \sigma(F) = 1\}$$

Beweisen Sie, dass **VALID** **co-NP**-vollständig ist

- (c) Betrachten Sie Definition 6.7 sowie Satz 6.9 der Vorlesung erneut (Zertifikat und polynomiell beschränkter Verifikator). Diskutieren Sie, wie eine analoge Version von Definition 6.7 und Satz 6.9 für **co-NP** aussehen kann. Beweisen Sie dann Ihre Analogie zu Satz 6.9.