

**Einführung in die theoretische Informatik**  
Sommersemester 2019 – Übungsblatt 12

**AUFGABE 12.1.** (*Wichtige Begriffe*)

Stufe A

Überprüfen Sie, dass Sie die folgenden Begriffe korrekt definieren können.

- Polynomielle Reduktion  $\leq_p$
- SAT
- 3-KNF-SAT

**AUFGABE 12.2.** (*Quiz Komplexität*)

Stufe B

Nehmen Sie an, dass  $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$ .

- Wenn  $A \leq_p$  2-KNF-SAT, dann ist  $A$  **NP**-vollständig.
- Sei  $B \in \mathbf{P}$  und  $A \leq B$ . Dann ist  $A \in \mathbf{P}$ .
- Sei  $\bar{A} \in \mathbf{P}$ . Dann ist  $A \in \mathbf{NP}$ . (Hinweis:  $\bar{A}$  ist das Komplement von  $A$ .)
- Es gilt: ( $A \leq_p$  SAT und  $3\text{COL} \leq_p A$ ) gdw.  $A$  **NP**-vollständig.
- Sei der Graph  $\mathcal{G} = (V, E)$  gegeben. Folgendes Problem ist **NP**-schwer:  
INPUT: Eine natürliche Zahl  $k$ . OUTPUT: „Ja“, falls in  $\mathcal{G}$  eine Rundreise der Länge  $\leq k$  existiert, die alle Knoten genau einmal besucht, sonst „Nein“.

**AUFGABE 12.3.** (*SAT-Varianten*)

Stufe C

Wir betrachten verschiedene Varianten von SAT, die auch NP-vollständig sind. Zeigen Sie diese NP-Vollständigkeit, indem Sie für jede Variante  $X$  eine Reduktion  $3\text{-KNF-SAT} \leq_p X$  angeben und  $X \in \mathbf{NP}$  zeigen.

- 3-OCC-KNF-SAT:
  - Eingabe: Eine Formel  $F$  in KNF, bei der jede Variable höchstens dreimal auftritt.
  - Frage: Ist  $F$  erfüllbar?
- Wir betrachten den ITE-Operator mit der Semantik  $\text{ITE}(x, y, z) := (x \rightarrow y) \wedge (\neg x \rightarrow z)$ . Eine ITE-Formel genügt der folgenden Grammatik:

$$F \rightarrow \text{ITE}(F, F, F) \mid x \mid \text{true} \mid \text{false} \quad \text{für Variablen } x \in \mathcal{V}$$

ITE-SAT:

- Eingabe: Eine ITE-Formel  $F$ .
  - Frage: Ist  $F$  erfüllbar?
- 1-Pro-Klausel-KNF-SAT:
    - Eingabe: Eine Formel  $F$  in KNF.
    - Frage: Gibt es eine erfüllende Belegung für  $F$ , so dass genau ein Literal pro Klausel auf *wahr* gesetzt wird?

**AUFGABE 12.4.** (*Nullstellen Problem*)

Stufe C

Wir betrachten das NULLSTELLEN-Problem:

**Gegeben** Ein Polynom  $p$  über Variablen  $x_1, \dots, x_n$  mit ganzzahligen Koeffizienten.

**Problem** Gibt es eine ganzzahlige Nullstelle, also  $v_1, \dots, v_n \in \mathbf{Z}$  mit  $p(v_1, \dots, v_n) = 0$ ?

- Zeigen Sie, dass das NULLSTELLEN-Problem NP-hart ist, indem Sie eine Reduktion von SAT angeben. Hinweis: Die folgenden Beziehungen könnten dabei nützlich sein:

$$\begin{aligned} f(x)g(x) = 0 &\iff f(x) = 0 \vee g(x) = 0 \\ f(x)^2 + g(x)^2 = 0 &\iff f(x) = 0 \wedge g(x) = 0 \end{aligned}$$

- Wo liegt das Problem bei folgendem "Beweis", dass NULLSTELLEN in NP ist:

Ein Zertifikat ist genau eine Nullstelle von  $p$ , also ein Vektor von Zahlen  $v_1, \dots, v_n \in \mathbf{Z}$ . Ein Verifikator muss nun lediglich überprüfen, ob  $p(v_1, \dots, v_n) = 0$ . Nach Satz 5.10 ist das Problem damit in NP.

**AUFGABE 12.5.** (*co-NP*)

Stufe E

Auf dem vorherigen Übungsblatt haben wir uns mit der Komplexitätsklasse co-NP beschäftigt:

$$\text{co-NP} = \{L \mid \bar{L} \in \mathbf{NP}\}$$

---

Dort haben wir gezeigt dass  $L \in \text{co-NP}$  gdw. es eine DTM  $M$  und ein Polynom  $p$  gibt, so dass  $\{w \in \Sigma^* \mid \forall c \in \Delta^{p(|w|)}. w\#c \in L(M)\} = L$  und  $\text{time}_M(w\#c) \leq p(|w|)$ .

In dieser Aufgabe untersuchen wir die Beziehungen zwischen  $P$ ,  $\text{NP}$  und  $\text{co-NP}$ .

- (a) Zeigen Sie  $P \subseteq \text{NP} \cap \text{co-NP}$
- (b) Zeigen Sie unter der Annahme  $P = \text{NP}$ , dass  $\text{NP} = \text{co-NP}$  gilt.
- (c) Angenommen es gäbe eine  $\text{co-NP}$  vollständige Sprache  $L$  mit  $L \in \text{NP}$ . Zeigen Sie dass dann  $\text{NP} = \text{co-NP}$  gilt