

Einführung in die theoretische Informatik
Sommersemester 2019 – Übungsblatt Lösungsskizze 4

AUFGABE 4.1. (*Wichtige Begriffe*)

Stufe A

Überprüfen Sie, dass Sie die Folgenden Begriffe korrekt definieren können.

- Wortproblem
- Leerheitsproblem
- Endlichkeitsproblem
- Äquivalenzproblem
- Minimierung
- Pumping Lemma
- Strukturelle Induktion

AUFGABE 4.2. (*Automata Tutor*)

Im AutomataTutor stehen wieder neue Aufgaben zur Verfügung. Die Aufgaben finden Sie unter den Kategorie "Pumping Lemma Game". Einige der Aufgaben sind auch bepunktete Hausaufgaben.

Stufe B

AUFGABE 4.3. (*Probleme*)

Stufe B

Wie können Sie für einen

- (a) DFA (b) NFA (c) Regulären Ausdruck

feststellen, ob die von ihm akzeptierte Sprache

- (1) endlich ist? (2) leer ist? (3) ein Wort w enthält?

- (d) Wie können Sie für zwei DFAs feststellen, ob sie dieselbe Sprache akzeptieren?

Lösungsskizze

Siehe Vorlesung Folien 98ff. Reguläre Ausdrücke kann man in ϵ -NFAs überführen und dann die Verfahren aus der Vorlesung anwenden, oder aber rekursive Prozeduren angeben, siehe z.B. Aufgabe 3.7.

AUFGABE 4.4. (*Verständnis*)

Stufe B

Geben Sie jeweils eine formale Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ mit folgenden Eigenschaften an:

- (a) endlich (b) unendlich und regulär (c) nicht regulär und kontextfrei

Beschreiben Sie in eigenen Worten, wie Sie bei der Konstruktion der Sprachen vorgegangen sind, um sicher zu stellen, dass die Sprache die gewünschte Eigenschaft hat.

Lösungsskizze

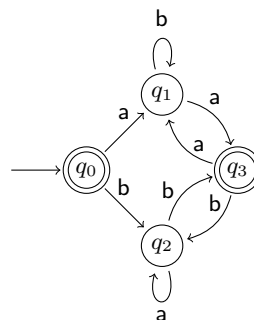
- (a) $A = \emptyset$ (b) $B = L(a^*)$ (c) $C = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

AUFGABE 4.5. (*Minimierung*)

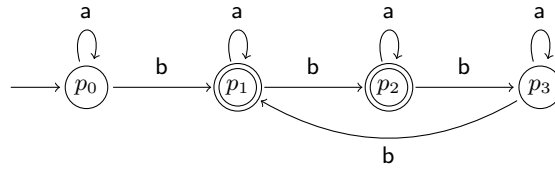
Stufe B/C

Minimieren Sie die folgenden DFAs.

- (a) DFA D_1 :



(b) DFA D_2 :

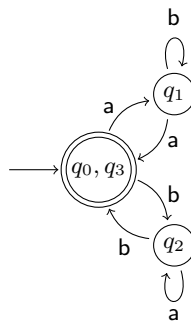


Lösungsskizze

(a) Tabelle:

	q_0	q_1	q_2	q_3
q_0	—	—	—	—
q_1	ε	—	—	—
q_2	ε	a	—	—
q_3	ε	ε	ε	—

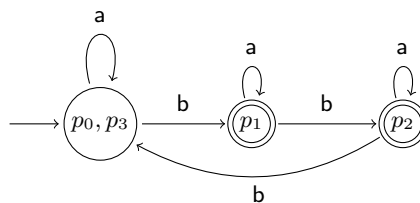
Minimierter DFA D_1^m :



(b) Tabelle:

	p_0	p_1	p_2	p_3
p_0	—	—	—	—
p_1	ε	—	—	—
p_2	ε	b	—	—
p_3	ε	ε	ε	—

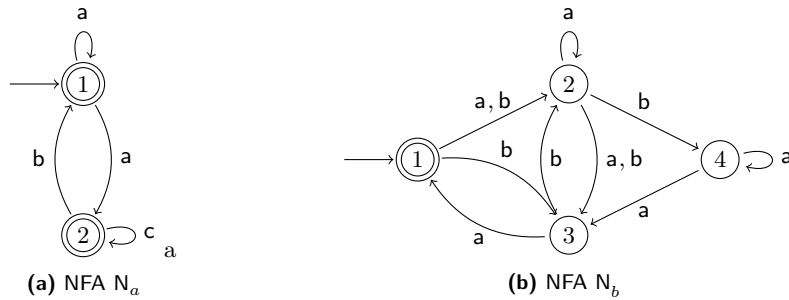
Minimierter DFA D_2^m :



AUFGABE 4.6. (*Ardens Lemma*)

Betrachten Sie die beiden NFAs N_a und N_b .

- (a) Geben Sie für beide NFAs das nach Vorlesung dazugehörige Gleichungssystem an.
- (b) Geben Sie dann für jeden der beiden NFAs mittels Gauß-Verfahren und Ardens Lemma einen regulären Ausdruck r_a bzw. r_b an, so dass $L(N_a) = L(r_a)$ bzw. $L(N_b) = L(r_b)$



Lösungsskizze

Die Variable X_i für einen Zustand i wird gleichgesetzt mit der Vereinigung der Variablen der in einem Schritt erreichbaren Zuständen mit der Kantenbeschriftung als Präfix. Zusätzlich fügen wir die Konstante $\{\varepsilon\}$ für Endzustände ein.

- (a) Aufstellen des Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} X_1 &\equiv \varepsilon \mid aX_1 \mid aX_2 \\ X_2 &\equiv \varepsilon \mid bX_1 \mid cX_2 \end{aligned}$$

Lösen nach X_1 :

$$\begin{aligned} X_2 &\equiv cX_2 \mid (\varepsilon \mid bX_1) && \text{Umformen} \\ X_2 &\equiv c^*(\varepsilon \mid bX_1) && \text{Ardens Lemma} \\ X_1 &\equiv \varepsilon \mid aX_1 \mid a(c^*(\varepsilon \mid bX_1)) && \text{Einsetzen von } X_2 \\ X_1 &\equiv (a \mid ac^*b)X_1 \mid (\varepsilon \mid ac^*) && \text{Umformen} \\ X_1 &\equiv (a \mid ac^*b)^*(\varepsilon \mid ac^*) && \text{Ardens Lemma} \end{aligned}$$

- (b) Aufstellen des Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} X_1 &\equiv \varepsilon \mid (a|b)X_2 \mid bX_3 \\ X_2 &\equiv aX_2 \mid (a|b)X_3 \mid bX_4 \\ X_3 &\equiv aX_1 \mid bX_2 \\ X_4 &\equiv aX_3 \mid aX_4 \end{aligned}$$

Lösen nach X_1 :

$$\begin{aligned} X_1 &\equiv \varepsilon \mid baX_1 \mid (a|b|bb)X_2 && \text{Einsetzen von } X_3 \\ X_2 &\equiv (aa|ba)X_1 \mid (a|ab|bb)X_2 \mid bX_4 && \text{Einsetzen von } X_3 \\ X_4 &\equiv aaX_1 \mid abX_2 \mid aX_4 && \text{Einsetzen von } X_3 \\ X_4 &\equiv a^*(aaX_1 \mid abX_2) && \text{Ardens Lemma} \\ X_2 &\equiv (aa|baa^*)X_1 \mid (a|ab|ba^*b)X_2 && \text{Einsetzen von } X_4 \\ X_2 &\equiv (a|ab|ba^*b)^*(aa|baa^*)X_1 && \text{Ardens Lemma} \\ X_1 &\equiv \varepsilon \mid (ba \mid (a|b|bb)(a|ab|ba^*b)^*(aa|baa^*))X_1 && \text{Einsetzen von } X_2 \\ X_1 &\equiv (ba \mid (a|b|bb)(a|ab|ba^*b)^*(aa|baa^*))^* && \text{Ardens Lemma} \end{aligned}$$

AUFGABE 4.7. (*Pumping Lemma*)

Beweisen Sie für jede der folgenden Sprachen mithilfe des Pumping Lemmas, dass sie *nicht* regulär sind.

- (a) $L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid w = w^R\}$
- (b) $L_2 = \{w \in \{0,1\}^* \mid |w|_0 \geq |w|_1\}$
- (c) $L_3 = \{\varepsilon, a, a^{n \cdot m} \mid m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, m > 1, n > 1\}$
- (d) $L_4 = \{a^{6i}b^{6i} \mid i \geq 0\}$
- (e) $L_5 = \{a^{2^i} \mid i \geq 0\}$

- (a)
- Angenommen, L_1 wäre regulär.
 - Dann können wir das Pumping-Lemma anwenden.
 - Sei $n \in \mathbb{N}$ eine Pumping-Lemma-Zahl.
 - Dann gilt $z = 0^n 10^n \in L_1$ und $|z| \geq n$.
 - Es gibt also für z eine Zerlegung $z = uvw$ mit $v \neq \varepsilon$ und $|uv| \leq n$, so dass $uv^i w \in L_1$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$ (*).
 - Durch unsere Wahl von z folgt $uv = 0^k$ für $0 < k \leq n$. Also $u = 0^i$ und $v = 0^j$ mit $i + j = k$ und $j > 0$.
 - Dann ist aber $uv^2 w = 0^i 0^{2j} 0^{n-k} 10^n \notin L_1$, denn $i + 2j + n - k > n$. Dies steht im Widerspruch zu (*).
 - Das heißt unsere ursprüngliche Annahme ist falsch und L_1 nicht regulär.
- (b)
- Angenommen, L_2 wäre regulär.
 - Dann können wir das Pumping-Lemma anwenden.
 - Sei $n \in \mathbb{N}$ eine Pumping-Lemma-Zahl.
 - Dann gilt $z = 0^n 1^n \in L_2$ und $|z| \geq n$.
 - Es gibt also für z eine Zerlegung $z = uvw$ mit $v \neq \varepsilon$ und $|uv| \leq n$, so dass $uv^i w \in L_2$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$ (*).
 - Aus unserer Wahl von z folgt, dass $u = 0^i$ und $v = 0^j$ mit $j > 0$ gilt.
 - Allerdings ist $uv^0 w = 0^i 0^{n-i-j} 1^n \notin L_2$, weil $n - i - j < n$. Dies steht im Widerspruch zu (*).
 - Das heißt unsere ursprüngliche Annahme ist falsch und L_2 nicht regulär.
- (c)
- Angenommen, L_3 wäre regulär.
 - Da die regulären Sprachen unter Komplement abgeschlossen sind, ist auch

$$\overline{L_3} = \{a^n \mid n \in \mathbb{N}, n > 1, n \text{ ist prim}\}$$

regulär.

- Dann können wir das Pumping-Lemma anwenden.
- Sei $n \in \mathbb{N}$ eine Pumping-Lemma-Zahl.
- Da die Menge der Primzahlen bekanntlich unendlich ist, gibt es eine Primzahl p bzw. ein $z = a^p \in \overline{L_3}$, so dass z mindestens n Zeichen enthält, also $|z| \geq n$. Sei also $z \in L$ mit $|z| \geq n$.
- Es gibt für z eine Zerlegung $z = uvw$ mit $v \neq \varepsilon$ und $|uv| \leq n$, so dass $uv^i w \in \overline{L_3}$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$ (*).
- Wegen $uw = uv^0 w \in \overline{L_3}$ ist $|uw|$ eine Primzahl. Wir setzen $x = uv^{|uw|} w$.
Es gilt $x \in \overline{L_3}$, d. h. $|x|$ ist eine Primzahl. Es folgt aber auch $|x| = |uw| + |uv| |v| = |uw| (1 + |v|)$, d. h. $|x|$ ist wegen $|v| \neq 0$ keine Primzahl. Widerspruch.
- Das heißt unsere ursprüngliche Annahme ist falsch und $\overline{L_3}$ ist nicht regulär, somit ist auch L_3 nicht regulär.
- *Hinweis:* Eine andere zielführende Wahl für i wäre $p + 1$ gewesen, da man dann folgendes erhält:

$$|uv^i w| = |uw| + |v|(p + 1) = p - |v| + |v|(p + 1) = (|v| + 1)p$$

- (d)
- Angenommen, L_4 wäre regulär.
 - Dann können wir das Pumping-Lemma anwenden.
 - Sei $n \in \mathbb{N}$ eine Pumping-Lemma-Zahl.
 - Dann gilt $z = a^{6n} b^{6n} \in L_4$ und $|z| \geq n$.
 - Es gibt also für z eine Zerlegung $z = uvw$ mit $v \neq \varepsilon$ und $|uv| \leq n$, so dass $uv^i w \in L_4$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$ (*).
 - Deshalb $v = a^j$ für ein $0 < j \leq n$.
 - Dann ist aber $uv^0 w = a^{6n-j} b^{6n} \notin L_4$, denn $6n - j < 6n$. Dies steht im Widerspruch zu (*).
 - Das heißt unsere ursprüngliche Annahme ist falsch und L_4 nicht regulär.
- (e)
- Angenommen, L_5 wäre regulär.
 - Dann können wir das Pumping-Lemma anwenden.
 - Sei $n \in \mathbb{N}$ eine Pumping-Lemma-Zahl.
 - Dann gilt $a^{2^n} \in L_5$ und $|a^{2^n}| \geq n$.
 - Es gibt also für z eine Zerlegung $z = uvw$ mit $v \neq \varepsilon$ und $|uv| \leq n$, so dass $uv^i w \in L_5$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$ (*).
 - Deshalb $v = a^j$ für ein $0 < j \leq n$.
 - Dann ist aber $uv^2 w = a^{2^n+j} \notin L_5$, denn

$$2^n < 2^n + j \leq 2^n + n < 2^n + 2^n = 2^{n+1}$$

Dies steht im Widerspruch zu (*).

- Das heißt unsere ursprüngliche Annahme ist falsch und L_4 nicht regulär.

AUFGABE 4.8. (Umkehrung(Spiegelung))

Stufe D

Ziel dieser Aufgabe ist, die Umkehrung einer Sprache zu berechnen, d.h. für jede reguläre Sprache L die Sprache L^R anzugeben, so dass $L^R := \{w^R \mid w \in L\}$.

Sei D ein DFA. Geben Sie einen Algorithmus an, der den DFA D in einen ε -NFA N übersetzt, so dass $L(D)^R = L(N)$. Beweisen Sie auch die Korrektheit Ihres Verfahrens.

Lösungsskizze

Sei $D = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DFA.

Konstruktion: Wir definieren den ε -NFA $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ wie folgt:

- $Q' := Q \cup \{\hat{q}\}$, wobei $\hat{q} \notin Q$
- $q'_0 := \hat{q}$
- $\Sigma' := \Sigma$
- $(\hat{q}, \varepsilon, q') \in \delta'$ für alle $q' \in F$
- $(q', x, q) \in \delta'$ für $x \in \Sigma$ und $(q, x, q') \in \delta$
- $F' = \{q_0\}$

Korrektheit: Wir müssen zeigen, dass $w \in L(D) \Leftrightarrow w^R \in L(N)$.

$w \in L(D) \Leftrightarrow$

Es gibt einen akzeptierenden Lauf $q_0 \xrightarrow{D^1} \dots \xrightarrow{D^n} q_f$, wobei $n = |w|$ und $q_f \in F$. \Leftrightarrow

Es gibt einen akzeptierenden Lauf $\hat{q} \xrightarrow{N^1} q_f \xrightarrow{N^n} \dots \xrightarrow{N^1} q_0$. \Leftrightarrow

$w^R \in L(N)$

Die Konstruktion stellt sicher, dass die Existenz des einen Laues die des anderen bedingt. Von q_0 zu q_f bzw. anders rum bedingen die Läufe sich, da alle Transitionen umgedreht werden. Der Lauf im DFA ist akzeptierend, da $q_f \in F$. Der Lauf im NFA ist akzeptierend, da $F' = \{q_0\}$. Die Transition $\hat{q} \rightarrow q_f$ existiert, da $q_f \in F$.

Um die Äquivalenz zwischen den Läufen formal zu beweisen, müssten wir zunächst folgende stärkere Aussage für alle $w \in \Sigma^*$, $n \geq 0$ mit $|w| = n$ und $q \in Q$ per Induktion über n beweisen:

$$q_0 \xrightarrow{D^1} \dots \xrightarrow{D^n} q \Leftrightarrow q \xrightarrow{N^n} \dots \xrightarrow{N^1} q_0$$

AUFGABE 4.9. (*Homomorphismen auf regulären Sprachen*)

Stufe E

Sei Σ ein Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$ eine reguläre Sprache. Weiter sei $h: \Sigma \rightarrow \Sigma^*$ eine Abbildung, die jedem Zeichen $x \in \Sigma$ ein Wort $h(x) \in \Sigma^*$ zuordnet. h erweitert man kanonisch auf Σ^* mittels $h(\varepsilon) = \varepsilon$ und $h(xw) = h(x)h(w)$ für alle $x \in \Sigma, w \in \Sigma^*$. Schließlich sei $h(L) = \{h(w) \mid w \in L\}$.

- (a) Zeigen Sie: Ist L regulär, dann ist auch $h(L)$ regulär.
- (b) Zeigen Sie unter Verwendung des Resultats aus Aufgabenteil (a), dass $L' = \{ab^{3i}cd^{2i}e \mid i \in \mathbb{N}_0\}$ nicht regulär ist.

Lösungsskizze

- (a) **Konstruktion:** Wir liften h auf reguläre Ausdrücke und erhalten h_{RE} :

$$\begin{aligned} h_{RE}(\emptyset) &= \emptyset & h_{RE}(\alpha\beta) &= h_{RE}(\alpha)h_{RE}(\beta) \\ h_{RE}(\varepsilon) &= \varepsilon & h_{RE}(\alpha \mid \beta) &= h_{RE}(\alpha) \mid h_{RE}(\beta) \\ h_{RE}(x) &= h(x) \quad \text{für } x \in \Sigma & h_{RE}(\alpha^*) &= h_{RE}(\alpha)^* \end{aligned}$$

Korrektheit: Wir zeigen $L(h_{RE}(\gamma)) = h(L(\gamma))$ mit struktureller Induktion über γ . Dabei verwenden wir das h strukturerhaltend ist: $h(AB) = h(A)h(B)$, $h(A \cup B) = h(A) \cup h(B)$, sowie $h(A^n) = (h(A))^n$.

$\gamma = \emptyset$: $L(h_{RE}(\emptyset)) = \emptyset = h(L(\emptyset))$

$\gamma = \varepsilon$: $L(h_{RE}(\varepsilon)) = \{\varepsilon\} = h(L(\varepsilon))$

$\gamma = x$: $L(h_{RE}(x)) = \{h(x)\} = h(L(x))$ für $x \in \Sigma$.

$\gamma = \alpha\beta$: $L(h_{RE}(\alpha\beta)) = L(h_{RE}(\alpha))L(h_{RE}(\beta)) \stackrel{IH}{=} h(L(\alpha))h(L(\beta)) = h(L(\alpha)L(\beta)) = h(L(\alpha\beta))$

$\gamma = \alpha \mid \beta$: $L(h_{RE}(\alpha \mid \beta)) = L(h_{RE}(\alpha)) \cup L(h_{RE}(\beta)) \stackrel{IH}{=} h(L(\alpha)) \cup h(L(\beta)) = h(L(\alpha) \cup L(\beta)) = h(L(\alpha \mid \beta))$

$\gamma = \alpha^*$: $L(h_{RE}(\alpha^*)) = L(h_{RE}(\alpha))^* \stackrel{IH}{=} h(L(\alpha))^* = \bigcup_{i \geq 0} (h(L(\alpha)))^i = \bigcup_{i \geq 0} h(L(\alpha)^i) = h(L(\alpha^*))$

Sei r ein regulärer Ausdruck für L . Dann

$$h(L) = h(L(r)) = L(h_{RE}(r))$$

und somit $h(L)$ regulär.

Alternativ kann der Beweis anhand eines Automaten geführt werden. Dabei werden die Kantenbeschriftungen mit h umgeschrieben.

- (b) Wir definieren eine Abbildung $h: \Sigma \rightarrow \Sigma^*$:

$$h(a) = \varepsilon \quad h(b) = aa \quad h(c) = \varepsilon \quad h(d) = bbb \quad h(e) = \varepsilon.$$

Wir nehmen an das L' regulär ist. Dann ist laut (a) auch

$$h(\{ab^{3i}cd^{2i}e \mid i \in \mathbb{N}_0\}) = \{a^{6i}b^{6i} \mid i \in \mathbb{N}_0\}$$

regulär. Widerspruch zu Aufgabe 4.5 d). L' ist somit nicht regulär.