

Einführung in die theoretische Informatik
Sommersemester 2019 – Hausaufgabenblatt Lösungsskizze 4

Handschriftliche Abgabe

Formale Kriterien zu handschriftlichen Abgaben entnehmen Sie bitte der Website <https://www21.in.tum.de/teaching/theo/SS19>.

AUFGABE 4.1. (*AutomataTutor*)

0 Punkte

Lösen Sie im AutomataTutor die Aufgaben H4.1 (a–b). Beachten Sie, dass im Gegensatz zu den Übungsaufgaben für jede Teilaufgabe maximal fünf Versuche erlaubt sind.

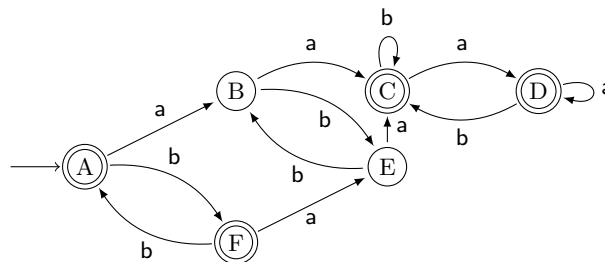
Die Lösungen müssen Sie nicht in ihre handschriftliche Abgabe mit aufnehmen, es reicht aus sie im AutomataTutor einzureichen. Diese Aufgabe ist einzeln zu bearbeiten, die restlichen Aufgaben in Zweiergruppen.

Aufgrund technischer Probleme gibt es diese Woche entgegen der ursprünglichen Ankündigung keine Punkte auf die Aufgaben im AutomataTutor. Sie können die Aufgaben aber natürlich trotzdem zur Übung bearbeiten.

AUFGABE 4.2. (*DFA Minimierung*)

1 Punkt

Minimieren Sie den folgenden DFA $M = (\{A, \dots, F\}, \{a, b\}, \delta, A, \{A, C, D, F\})$:

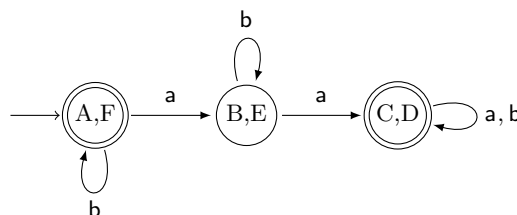


Lösungsskizze

Im üblichen Schema markieren wir zuerst alle Paare als unterscheidbar, bei denen einer ein Endzustand und der andere kein Endzustand ist. Nach dem ersten Durchlauf, in dem wir alle Paare markieren, die beim Lesen eines Zeichens in ein bereits markiertes Paar führen, sieht das Schema aus wie hier dargestellt:

A					
ε	B				
a	ε	C			
a	ε		D		
ε		ε	ε	E	
	ε	a	a	ε	F

Beim zweiten Durchlauf ändert sich nichts mehr: Alle unmarkierten Paare haben nur noch unmarkierte Paare als Nachfolger. Damit können wir abbrechen und erhalten die Äquivalenzklassen $\{A, F\}$, $\{B, E\}$ und $\{C, D\}$. Der minimierte Automat hat folgenden Zustandsgraphen:



AUFGABE 4.3. (*Pumping Lemma*)

3 Punkte

- (a) Wir betrachten die Sprache der Gleitkommazahlen $L = (+|-|\varepsilon)(DD^*.D^*|D^*.DD^*)$ mit Alphabet $\Sigma = \{+, -, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, .\}$ und $D = (0|1|2|3|4|5|6|7|8|9)$. Geben Sie die kleinste Pumping-Lemma-Zahl der Sprache L an. Beweisen Sie Ihre Aussage!
- (b) Wir betrachten die Sprache $L_1 = \{pa^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} qb^n r \mid n \in \mathbb{N}\}$ mit $\Sigma = \{a, b, p, q, r\}$. Zeigen sie mit dem Pumping-Lemma, dass L_1 nicht regulär ist.
- (c) Wir betrachten die Sprache $L_2 = \{(ab)^n (ba)^m \mid n, m \in \mathbb{N}, n < m\}$ mit $\Sigma = \{a, b\}$. Zeigen sie mit dem Pumping-Lemma das L_2 nicht regulär ist.

Lösungsskizze

- (a) 4 ist eine Pumping-Lemma-Zahl. Beweis:

Jedes $z \in L$ mit $|z| \geq 4$ hat die Form $z_1 = (+|-|\varepsilon)D^k.D^i$ oder $z_2 = (+|-|\varepsilon)D^i.D^k$ mit $k > 0$. Wir betrachten z_1 . Für $u = (+|-|\varepsilon), v = D, w = D^{k-1}.D^i$ gilt dann $|uv| \leq 4, |v| > 0$ und $uv^i w \in L$ für alle $i \geq 0$.

Für z_2 gilt das Analoge wenn $i > 0$. Sei $i = 0$. Dann gilt $k \geq 2$. Damit folgt für $u = (+|-|\varepsilon), v = D, w = D^{k-1}$ dass $|uv| \leq 4, |v| > 0$ und da w nicht leer ist $uv^i w \in L$ für alle $i \geq 0$.

3 ist keine Pumping-Lemma-Zahl. Beweis:

Wenn man annimmt, dass 3 eine Pumping-Lemma-Zahl ist, müsste es für $z = +.1 \in L$ eine Zerlegung $z = uvw$ geben mit $|uv| \leq 3$ und $v \neq \varepsilon$, so dass $uv^2 w \in L$ gilt. v kann kein "+" oder "." enthalten, da sonst $w^2 w$ nicht in L ist. Daher muss $u = 1$ gelten, womit aber $uv^0 w = +.$ nicht in L ist. Widerspruch.

- (b) • Angenommen, L_1 wäre regulär.
 • Dann können wir das Pumping-Lemma anwenden.
 • Sei $n \in \mathbb{N}$ eine Pumping-Lemma-Zahl.
 • Dann gilt $z = pa^n qb^{n^2} r \in L_1$ und $|z| \geq n$.
 • Es gibt für z eine Zerlegung $z = uvw$ mit $v \neq \varepsilon$ und $|uv| \leq n$, so dass $uv^i w \in L_1$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$.
 • v kann kein p enthalten, weil sonst $uv^2 w$ mehr als nur ein p enthalten würde und folglich selbst nicht in L_1 enthalten wäre. Wegen $|uv| \leq n$ kann v außerdem kein q , b , oder r enthalten. Folglich gilt $v = a^k$ für irgendein $0 < k < n$. Damit folgt $|uw|_b = n^2$ und $|uw|_a = n - k \neq \sqrt{n^2}$. Damit gilt $uw = uv^0 w \notin L_1$ Widerspruch.
 • Das heißt unsere ursprüngliche Annahme ist falsch und L_1 ist nicht regulär.
- (c) • Angenommen, L_2 wäre regulär.
 • Dann können wir das Pumping-Lemma anwenden.
 • Sei $n \in \mathbb{N}$ eine Pumping-Lemma-Zahl.
 • Dann gilt $z = (ab)^n (ba)^{n+1} \in L_2$ und $|z| \geq n$.
 • Es gibt für z eine Zerlegung $z = uvw$ mit $v \neq \varepsilon$ und $|uv| \leq n$, so dass $uv^i w \in L_2$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$.
 • Wegen $|uv| \leq n$ ist uv ein Präfix von $(ab)^n$. Es kann nicht $v = a$ oder $v = b$ gelten, da sonst $uv^2 w$ nicht in L_2 wäre. (Wörter in L_2 können nie mehrere a 's direkt aufeinanderfolgend enthalten, und nur an genau einer Stelle zwei direkt aufeinanderfolgende b 's)
 Die gleiche Argumentation gilt für $v = (aba)^k$ oder $v = (bab)^k$.
 Damit ist v von der Form $(ab)^k$ oder $(ba)^k$ für ein $k \geq 1$. In beiden Fällen ist das Wort $uv^2 w$ also von der Form $(ab)^{n+k} (ba)^{n+1}$. Damit folgt $uv^2 w \notin L_2$ weil $n+k \geq n+1$.
 • Das heißt unsere ursprüngliche Annahme ist falsch und L_2 ist nicht regulär.

AUFGABE 4.4. (Gerade und ungerade reguläre Ausdrücke)

Sei Σ ein endliches Alphabet. Wir definieren die folgenden Prädikate auf Sprachen über Σ :

2 Punkte

$$\text{even}(A) \longleftrightarrow \forall w \in A. |w| \text{ ist gerade} \quad \text{odd}(A) \longleftrightarrow \forall w \in A. |w| \text{ ist ungerade}$$

Es lässt sich zeigen, dass für beliebige **nichtleere** Sprachen $A, B \subseteq \Sigma^*$ die folgenden Gleichungen gelten:

$$\text{even}(AB) \longleftrightarrow (\text{even}(A) \wedge \text{even}(B)) \vee (\text{odd}(A) \wedge \text{odd}(B)) \quad (1)$$

$$\text{odd}(AB) \longleftrightarrow (\text{even}(A) \wedge \text{odd}(B)) \vee (\text{odd}(A) \wedge \text{even}(B)) \quad (2)$$

- (a) Beweisen Sie Gleichung (1). Falls bei Fallunterscheidungen zwei Fälle komplett analog sind, dürfen Sie dann auch einfach "Analog zu Fall ..." schreiben (vergewissern Sie sich jedoch, dass die Fälle *wirklich* analog sind).
- (b) Geben Sie rekursive Prozeduren $\text{even}_{\text{RE}}(r)$ und $\text{odd}_{\text{RE}}(r)$ auf regulären Ausdrücken an sodass

$$\text{even}_{\text{RE}}(r) \longleftrightarrow \text{even}(L(r)) \quad \text{odd}_{\text{RE}}(r) \longleftrightarrow \text{odd}(L(r)) .$$

Erinnern Sie sich dabei an die Gleichungen (1) und (2). Sie dürfen ebenfalls die von Übungsblatt 3 bekannte Prozedur *is_empty* verwenden, um $L(r) = \emptyset$ zu entscheiden.

- (c) Beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Konstruktion für even_{RE} per struktureller Induktion über r . Sie dürfen dabei ohne Beweis die Gleichungen (1) und (2) sowie die Korrektheit von odd_{RE} verwenden.

Lösungsskizze

- (a) Richtung \Leftarrow :

Annahme: $(\text{even}(A) \wedge \text{even}(B)) \vee (\text{odd}(A) \wedge \text{odd}(B))$

Fall 1: $\text{even}(A) \wedge \text{even}(B)$

Sei $w \in AB$. Dann gibt es $w_1 \in A, w_2 \in B$ mit $w = w_1 w_2$. Nach Annahme sind $|w_1|$ und $|w_2|$ gerade. Damit ist auch $|w_1 w_2| = |w_1| + |w_2|$ gerade.

Fall 2: $\text{odd}(A) \wedge \text{odd}(B)$: analog

Richtung \Rightarrow :

Annahme: $\text{even}(AB)$

Zu zeigen: $(\text{even}(A) \wedge \text{even}(B)) \vee (\text{odd}(A) \wedge \text{odd}(B))$

Beweis durch Widerspruch. Wir nehmen an: $(\neg \text{even}(A) \vee \neg \text{even}(B)) \wedge (\neg \text{odd}(A) \vee \neg \text{odd}(B))$

Fall 1: $\neg \text{even}(A)$ und $\neg \text{odd}(B)$

Es gibt also $u \in A, v \in B$ mit $|u|$ ungerade und $|v|$ gerade. Damit ist $|uv| = |u| + |v|$ ungerade, was ein Widerspruch zur Annahmen $\text{even}(AB)$ ist.

Fall 2: $\neg \text{even}(A)$ und $\neg \text{odd}(A)$

Es gibt also $u, v \in A$ mit $|u|$ ungerade und $|v|$ gerade. Da $B \neq \emptyset$ gibt es ein $w \in B$. Nach Annahme müssen dann $|uw| = |u| + |w|$ und $|vw| = |v| + |w|$ gerade sein. Aus ersterem folgt, dass $|w|$ gerade ist; aus letzterem, dass $|w|$ ungerade ist. Dies ist ein Widerspruch.

Die anderen beiden Fälle sind analog.

- (b)

$$\begin{array}{ll}
 \text{even}_{\text{RE}}(\emptyset) = \text{true} & \text{odd}_{\text{RE}}(\emptyset) = \text{true} \\
 \text{even}_{\text{RE}}(\varepsilon) = \text{true} & \text{odd}_{\text{RE}}(\varepsilon) = \text{false} \\
 \text{even}_{\text{RE}}(a) = \text{false} & \text{odd}_{\text{RE}}(a) = \text{true} \\
 \text{even}_{\text{RE}}(r \mid s) = \text{even}_{\text{RE}}(r) \wedge \text{even}_{\text{RE}}(s) & \text{odd}_{\text{RE}}(r \mid s) = \text{odd}_{\text{RE}}(r) \wedge \text{odd}_{\text{RE}}(s) \\
 \text{even}_{\text{RE}}(r^*) = \text{even}_{\text{RE}}(r) & \text{odd}_{\text{RE}}(r^*) = \text{false} \\
 \text{even}_{\text{RE}}(rs) = \text{is_empty}(rs) \vee (\text{even}_{\text{RE}}(r) \wedge \text{even}_{\text{RE}}(s)) \vee (\text{odd}_{\text{RE}}(r) \wedge \text{odd}_{\text{RE}}(s)) & \\
 \text{odd}_{\text{RE}}(rs) = \text{is_empty}(rs) \vee (\text{even}_{\text{RE}}(r) \wedge \text{odd}_{\text{RE}}(s)) \vee (\text{odd}_{\text{RE}}(r) \wedge \text{even}_{\text{RE}}(s)) &
 \end{array}$$

- (c) Die Basisfälle sind klar.

Fall 1: r^*

Induktionshypothese: $\text{even}_{\text{RE}}(r) \leftrightarrow \text{even}(\mathbf{L}(r))$ Zu zeigen: $\text{even}_{\text{RE}}(r^*) \leftrightarrow \text{even}(\mathbf{L}(r)^*)$

$$\begin{aligned}
 \text{even}_{\text{RE}}(r^*) &\stackrel{\text{def}}{\leftrightarrow} \text{even}_{\text{RE}}(r) \\
 &\stackrel{\text{IH}}{\leftrightarrow} \text{even}(\mathbf{L}(r)) \\
 &\stackrel{\text{def}}{\leftrightarrow} (\forall w \in \mathbf{L}(r). |w| \text{ gerade}) \\
 &\leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}. \forall w_1, \dots, w_n \in \mathbf{L}(r). |w_1 \dots w_n| \text{ gerade}) \\
 &\leftrightarrow (\forall w \in \mathbf{L}(r)^*. |w| \text{ gerade}) \\
 &\stackrel{\text{def}}{\leftrightarrow} \text{even}(\mathbf{L}(r)^*)
 \end{aligned}$$

Fall 2: $r \mid s$

Induktionshypothesen: $\text{even}_{\text{RE}}(r) \leftrightarrow \text{even}(\mathbf{L}(r))$ und $\text{even}_{\text{RE}}(s) \leftrightarrow \text{even}(\mathbf{L}(s))$

Zu zeigen: $\text{even}_{\text{RE}}(r \mid s) \leftrightarrow \text{even}(\mathbf{L}(r) \cup \mathbf{L}(s))$

$$\begin{aligned}
 \text{even}_{\text{RE}}(r \mid s) &\stackrel{\text{def}}{\leftrightarrow} \text{even}_{\text{RE}}(r) \wedge \text{even}_{\text{RE}}(s) \\
 &\stackrel{\text{IH}}{\leftrightarrow} \text{even}(\mathbf{L}(r)) \wedge \text{even}(\mathbf{L}(s)) \\
 &\stackrel{\text{def}}{\leftrightarrow} (\forall w \in \mathbf{L}(r). |w| \text{ gerade}) \wedge (\forall w \in \mathbf{L}(s). |w| \text{ gerade}) \\
 &\leftrightarrow (\forall w \in \mathbf{L}(r) \cup \mathbf{L}(s). |w| \text{ gerade}) \\
 &\stackrel{\text{def}}{\leftrightarrow} \text{even}(\mathbf{L}(r) \cup \mathbf{L}(s))
 \end{aligned}$$

Fall 3: rs

Induktionshypothesen: $\text{even}_{\text{RE}}(r) \longleftrightarrow \text{even}(\mathbf{L}(r))$ und $\text{even}_{\text{RE}}(s) \longleftrightarrow \text{even}(\mathbf{L}(s))$

Zu zeigen: $\text{even}_{\text{RE}}(rs) \longleftrightarrow \text{even}(\mathbf{L}(r)\mathbf{L}(s))$

Falls $\mathbf{L}(r) = \emptyset$ oder $\mathbf{L}(s) = \emptyset$, so ist $\mathbf{L}(rs)$ ebenfalls leer und somit gilt $\text{even}(\mathbf{L}(rs))$, passend zur Definition von even_{RE} . Wir nehmen also nun an, dass $\mathbf{L}(r) \neq \emptyset$ und $\mathbf{L}(s) \neq \emptyset$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \text{even}_{\text{RE}}(rs) &\stackrel{\text{def}}{\longleftrightarrow} (\text{even}_{\text{RE}}(r) \wedge \text{even}_{\text{RE}}(s)) \vee (\text{odd}_{\text{RE}}(r) \wedge \text{odd}_{\text{RE}}(s)) \\ &\stackrel{\text{IH}}{\longleftrightarrow} (\text{even}(\mathbf{L}(r)) \wedge \text{even}(\mathbf{L}(s))) \vee (\text{odd}(\mathbf{L}(r)) \wedge \text{odd}(\mathbf{L}(s))) \\ &\stackrel{(1)}{\longleftrightarrow} \text{even}(\mathbf{L}(r)\mathbf{L}(s)) \end{aligned}$$