Lehrstuhl für Logik und Verifikation
Fakultät für Informatik
Technische Universität München

Esolution
Sticker mit SRID hier einkleben

Hinweise zur Personalisierung:

- Ihre Prüfung wird bei der Anwesenheitskontrolle durch Aufkleben eines Codes personalisiert.
- Dieser enthält lediglich eine fortlaufende Nummer, welche auch auf der Anwesenheitsliste neben dem Unterschriftenfeld vermerkt ist.
- Diese wird als Pseudonym verwendet, um eine eindeutige Zuordnung Ihrer Prüfung zu ermöglichen.

Theoretische Informatik

Klausur: IN0011 / Wiederholung **Datum:** Dienstag, 1. Oktober 2019
Prüfer: Prof. Dr. Tobias Nipkow **Uhrzeit:** 08:00 – 11:00

	A 1	A 2	A 3	A 4	A 5	A 6	A 7	A 8
I								

Bearbeitungshinweise

- Diese Klausur umfasst **20 Seiten** mit insgesamt **8 Aufgaben**.
  Bitte kontrollieren Sie jetzt, dass Sie eine vollständige Angabe erhalten haben.
- Die Gesamtpunktzahl in dieser Prüfung beträgt 60 Punkte.
- Das Heraustrennen von Seiten aus der Prüfung ist untersagt.
- Als Hilfsmittel sind zugelassen:
  - ein **nicht-programmierbarer Taschenrechner**
  - ein **analoges Wörterbuch** Deutsch ↔ Muttersprache **ohne Anmerkungen**
- Mit * gekennzeichnete Teilaufgaben sind ohne Kenntnis der Ergebnisse vorheriger Teilaufgaben lösbar.
- **Es werden nur solche Ergebnisse gewertet, bei denen der Lösungsweg erkennbar ist.** Auch Textaufgaben sind **grundsätzlich zu begründen**, sofern es in der jeweiligen Teilaufgabe nicht ausdrücklich anders vermerkt ist.
- Schreiben Sie weder mit roter / grüner Farbe noch mit Bleistift.
- Schalten Sie alle mitgeführten elektronischen Geräte vollständig aus, verstauen Sie diese in Ihrer Tasche und verschließen Sie diese.

Hörsaal verlassen von ________ bis ________ / Vorzeitige Abgabe um ________

Aufgabe 1 **Quiz 1: Reguläre Sprachen, kontextfreie Sprachen, Sprachen allgemein (9 Punkte)**

0 1 2 3 4 5 6 7

a)* Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob diese korrekt ist oder nicht. Begründen Sie ihre Antwort jeweils *kurz*. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet. Falls eine Aussage nicht gilt, geben Sie (soweit angebracht) entsprechende Gegenbeispiele an. Antworten wie „Ja, siehe Vorlesung" sind ohne weiteren Kontext *nicht* ausreichend.

1. Seien $A, B \subseteq \Sigma^*$ Sprachen. Dann ist $|AB| = |A| \cdot |B|$.
2. Zu jeder regulären Sprache L gibt es eine nicht mehrdeutige Grammatik, die L erzeugt.
3. Jede endliche Teilmenge einer kontextfreien Sprache ist kontextfrei.
4. Sei $A \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache. Dann gibt es höchstens eine unendlich große Myhill–Nerode-Klasse bezüglich $\equiv_A$.
5. Sei M ein NFA über dem Alphabet Σ, in dem jeder Zustand ein Endzustand ist. Dann akzeptiert M alle Wörter in Σ^*.
6. Sei $A \subseteq \Sigma^*$ regulär. Dann ist $\{w \mid w \in A \wedge w^R \in A\}$ ebenfalls regulär ($(w_1 \dots w_n)^R = w_n \dots w_1$ bezeichnet die Spiegelung von w).
7. Seien $A, B \subseteq \Sigma^*$ regulär mit $\varepsilon \notin A$. Dann sind alle Lösungen $X \subseteq \Sigma^*$ der Gleichung $X = AX \cup B$ regulär.

Die folgenden Lösungen sind teilweise deutlich ausführlicher als das, was bei der Korrektur einen ganzen Punkt gibt.

1. Falsch, z.B. $A = B = \{\varepsilon, a\}$. Dann ist $AB = \{\varepsilon, a, aa\}$ und damit $|AB| = 3 < 4 = |A| \cdot |B|$.
2. Korrekt, da laut Vorlesung jede reguläre Sprache auch eine DCFL ist und es laut Lemma 4.72 für jede DCFL eine nicht mehrdeutige Grammatik gibt. (Grobe Idee: DFA $\to$ DPDA $\to$ CFG. Die aus der Vorlesung bekannte Umwandlung DFA $\to$ CFG reicht auch, da sie eine eindeutige rechtslineare Grammatik erzeugt.)
3. Korrekt. Jede endliche Menge ist sowieso regulär (und damit kontextfrei).
4. Falsch, z.B. hat $L((aa)^*)$ die zwei unendlich großen Äquivalenzklassen $L((aa)^*)$ und $L(a(aa)^*)$. Allgemein ist jeder Zustand eines minimalen DFAs, der auf einem Zyklus liegt (z.B. weil er eine Schleife hat), eine unendliche Äquivalenzklasse (das ist auch eine einfache Art, ein Gegenbeispiel zu begründen).
5. Falsch, z.B. der NFA mit keinerlei Übergängen und nur einem Zustand, der auch Endzustand ist. Dieser akzeptiert die Sprachd $\{\varepsilon\}$. (Jeder Lauf in so einem Automaten ist akzeptierend, aber aufgrund der partiellen Übergangsrelation kann es Wörter geben, die gar keinen Lauf haben)
6. Ja. Diese Sprache ist einfach $A \cap A^R$ und reguläre Sprachen sind unter Spiegelung und Schnitt abgeschlossen.
7. Ja. Laut Ardens Lemma ist dann $X = A^*B$, was regulär ist, da A und B regulär sind.

b)* Nennen Sie jeweils ein Beispiel für die folgenden Objekte:

0
1
2

1. Eine mehrdeutige kontextfreie Grammatik.
2. Eine deterministisch kontextfreie Sprache (DCFL), die nicht von einem mit leerem Keller akzeptierenden DPDA akzeptiert werden kann.

Begründen Sie jeweils, warum das Objekt die jeweilige Eigenschaft hat.

1. $G = (\{S, A, B\}, \{a\}, P, S)$ mit den Produktionen $S \to A|\varepsilon$, $A \to \varepsilon$. Diese ist mehrdeutig, da das Wort a die zwei verschiedenen Syntaxbäume $S \to \varepsilon$ und $S \to A \to \varepsilon$ hat.
2. $\{a\}^*$ ist offensichtlich deterministisch kontextfrei (da regulär, vgl. Fakt 4.66), aber da sie die Präfixbedingung nicht erfüllt (z.B. $\varepsilon \in \{a\}^*$, aber auch $a \in \{a\}^*$) kann sie nicht von einem mit leerem Keller akzeptierenden DPDA erkannt werden (Lemma 4.68).

Aufgabe 2 **CYK (6 Punkte)**

Gegeben ist die Grammatik $\mathsf{G} = (\{A, B, S, T, U, X, Y\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit den folgenden Produktionen P:

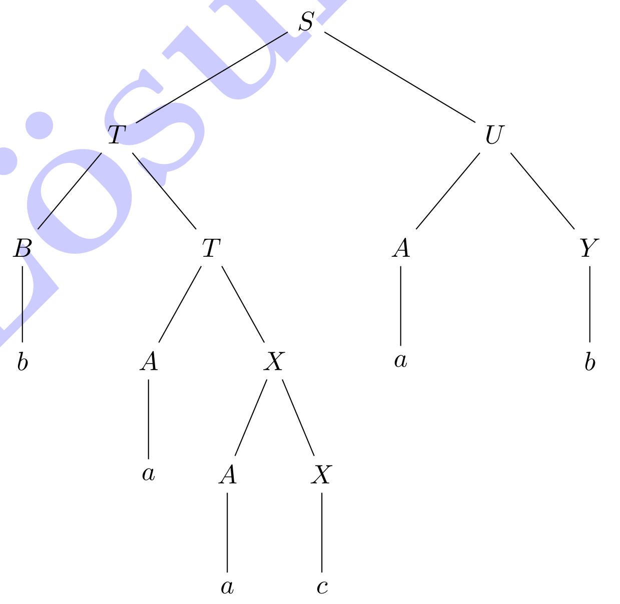
$$
\begin{array}{ll}
S \to TU \mid UT & U \to AY \\
T \to AX \mid BT \mid BA & Y \to BU \mid b \\
X \to AX \mid c & \\
A \to a & B \to b
\end{array}
$$

a)* Bestimmen Sie mithilfe des CYK-Algorithmus ob $w = baacab$ in $\mathsf{L}(\mathsf{G})$ liegt. Geben Sie die vollständige CYK-Tabelle an. Halten Sie sich dabei strikt an die Darstellung aus den Übungen und begründen Sie, warum aus Ihrer Tabelle hervorgeht, dass das Wort in der Sprache ist bzw. nicht.

S					
-	S				
T	-	S			
-	T,X	-	-		
T	-	T,X	-	U	
B,Y	A	A	X	A	B,Y
b	a	a	c	a	b

Damit ist das Wort in der Sprache enthalten, weil das Startsymbol S in der oberen linken Zelle enthalten ist.

b)* Zeichnen Sie für $w = baacab$ einen Ableitungsbaum bezüglich G.



Aufgabe 3 **Rekursion auf regulären Ausdrücken (9 Punkte)**

Sei $a \in \Sigma$ ein beliebiges, aber festes Zeichen. Für eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ definieren wir das Prädikat P, das angibt, ob es ein Wort in A gibt, das das Zeichen a enthält. Formal:

$$P(A) \longleftrightarrow \exists w{\in}A.\ |w|_a \geq 1$$

a)* Finden Sie für $A, B \subseteq \Sigma^*$ einen einfachen Ausdruck für $P(AB)$ in Abhängigkeit von $P(A)$ und $P(B)$. Beweisen Sie Ihre Behauptung. 0 1 2
Vorsicht: Vergessen Sie nicht den Fall, dass eine der Sprachen leer ist.

$$P(AB) \longleftrightarrow (P(A) \vee P(B)) \wedge A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset$$

Beweis: Wir zeigen, dass die linke Seite der Gleichung die rechte impliziert und umgekehrt.

Sei $A \neq \emptyset$ und $B \neq \emptyset$ und $P(A) \vee P(B)$. Falls $P(A)$ gilt, dann gibt es ein Wort $u \in A$, das ein a enthält und irgendein Wort $v \in B$. Somit ist $uv \in AB$ und uv enthält a, d.h. es gilt $P(AB)$. Der Fall für $P(B)$ ist analog.

Für die Rückrichtung gelte nun $P(AB)$. Dann gibt es $u \in A$ und $v \in B$, sodass uv ein a enthält. Falls u ein a enthält. so gilt $P(A)$. Ansonsten muss v ein a enthalten und es gilt $P(B)$. In beiden Fällen ist $A \neq \emptyset$ und $B \neq \emptyset$, da ja $u \in A$ und $v \in B$ ist. Somit folgt die rechte Seite.

0 1 2

b)* Geben Sie eine rekursive Definition eines Prädikats $Q(r)$ auf regulären Ausdrücken an, sodass $Q(r) \longleftrightarrow P(\mathsf{L}(r))$.
Sie dürfen hierbei auf das aus der Übung bekannte Prädikat is_empty(r) zurückgreifen, das bestimmt, ob die zu einem regulären Ausdruck r gehörende Sprache leer ist; d.h. is_empty(r) $\longleftrightarrow \mathsf{L}(r) = \emptyset$.

$$\begin{aligned}
Q(\emptyset) &\longleftrightarrow \text{false} \\
Q(\varepsilon) &\longleftrightarrow \text{false} \\
Q(x) &\longleftrightarrow x = a \\
Q(r \mid s) &\longleftrightarrow Q(r) \vee Q(s) \\
Q(r\,s) &\longleftrightarrow (Q(r) \vee Q(s)) \wedge \neg\text{is_empty}(r) \wedge \neg\text{is_empty}(s) \\
Q(r^*) &\longleftrightarrow Q(r)
\end{aligned}$$

c) Beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Konstruktion durch strukturelle Induktion über r. Sie müssen dabei *nur* die Fälle $r_1 \mid r_2$ (Vereinigung) und $r = r_1 r_2$ (Konkatenation) behandeln und dürfen die anderen 4 Fälle weglassen.

0 1 2 3 4

Geben Sie jeweils klar an, welche Aussage zu zeigen ist und ggf. was die Induktionshypothesen sind und wo Sie sie verwenden.

Sie dürfen Ihr Ergebnis aus Aufgabe a) verwenden, selbst wenn Sie es nicht beweisen konnten. Auch hier müssen Sie aber angeben, wo Sie es genau verwenden.

Fall $r \mid s$:
IH: $Q(r) \longleftrightarrow P(\mathsf{L}(r))$ und $Q(s) \longleftrightarrow P(\mathsf{L}(s))$
Zu zeigen: $Q(r \mid s) \longleftrightarrow P(\mathsf{L}(r \mid s))$

$$\begin{aligned} Q(r \mid s) &\overset{\text{def}}{\longleftrightarrow} Q(r) \lor Q(s) \\ &\overset{\text{IH}}{\longleftrightarrow} P(\mathsf{L}(r)) \lor P(\mathsf{L}(s)) \\ &\overset{\text{def}}{\longleftrightarrow} (\exists w{\in}\mathsf{L}(r).\ |w|_a \geq 1) \lor (\exists w{\in}\mathsf{L}(r).\ |w|_a \geq 1) \\ &\longleftrightarrow \exists w{\in}\mathsf{L}(r) \cup \mathsf{L}(s).\ |w|_a \geq 1 \\ &\overset{\text{def}}{\longleftrightarrow} P(\mathsf{L}(r) \cup \mathsf{L}(s)) \\ &\overset{\text{def}}{\longleftrightarrow} P(\mathsf{L}(r \mid s)) \end{aligned}$$

Fall $r\,s$:
IH: $Q(r) \longleftrightarrow P(\mathsf{L}(r))$ und $Q(s) \longleftrightarrow P(\mathsf{L}(s))$
Zu zeigen: $Q(r\,s) \longleftrightarrow P(\mathsf{L}(r\,s))$

$$\begin{aligned} Q(r\,s) &\overset{\text{def}}{\longleftrightarrow} (Q(r) \lor Q(s)) \land \text{is\_empty}(r) \land \text{is\_empty}(s) \\ &\overset{\text{IH}}{\longleftrightarrow} (P(\mathsf{L}(r)) \lor P(\mathsf{L}(s))) \land \mathsf{L}(r) \neq \emptyset \land \mathsf{L}(s) \neq \emptyset \\ &\overset{\text{a)}}{\longleftrightarrow} P(\mathsf{L}(r)\,\mathsf{L}(s)) \\ &\overset{\text{def}}{\longleftrightarrow} P(\mathsf{L}(r\,s)) \end{aligned}$$

Aufgabe 4 NFA Konstruktion (5 Punkte)

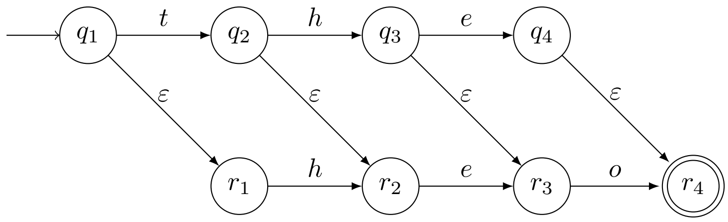
Wir betrachten die Sprache der Wörter die durch das Löschen genau eines Zeichens aus einem fixen Wort w hervorgehen:

$$\mathsf{L}_w = \{uv \mid u, v \in \Sigma^* \wedge \exists c \in \Sigma.\ ucv = w\}$$

Wobei Σ ein gegebenes Alphabet ist.

0 1 2

a)* Sei $\Sigma = \{\text{t,h,e,o}\}$. Zeichnen Sie einen ε-NFA, der die Sprache L_{theo} akzeptiert. Der Automat darf **maximal 10 Zustände** umfassen.



b)* Seien nun Σ und $w = w_1 \dots w_n \in \Sigma^*$ beliebig. Konstruieren Sie einen ε-NFA $\mathsf{M_w}$, der die Sprache L_w akzeptiert, indem Sie explizit das Tupel $\mathsf{M_w} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ angeben. Informelle Beschreibungen des Automaten werden nicht bewertet. Der Automat darf **maximal $\mathbf{2(n+1)}$ Zustände** umfassen.

$$
\begin{aligned}
Q &= \{q_1, \dots, q_n\} \cup \{r_1, \dots, r_n\} \\
\Sigma &= \Sigma \\
\delta &= \{(q_i, w_i, q_{i+1}) \mid i \in \{1, \dots, n-1\}\} \\
&\quad \cup \{(r_i, w_{i+1}, r_{i+1}) \mid i \in \{1, \dots, n-1\}\} \\
&\quad \cup \{(q_i, \varepsilon, r_i) \mid i \in \{1, \dots, n\} \\
F &= \{r_n\} \\
q_0 &= q_1
\end{aligned}
$$

Aufgabe 5 Pumping Lemma (8 Punkte)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Wir betrachten die folgende Sprache über dem Alphabet $\Sigma' = \{a, b, \#\}$:

$$\mathsf{L} = \{p\#w \mid p, w \in \Sigma^* \wedge p \text{ ist ein Präfix von } w\}$$

Dabei ist p genau dann ein Präfix von w, wenn es ein $v \in \Sigma^*$ gibt mit $pv = w$.

0 1 2 3 4 5 6

a)* Zeigen Sie, dass L nicht kontextfrei ist, indem Sie einen Widerspruchsbeweis unter Verwendung des Pumping Lemmas für kontextfreie Sprachen führen.

- Angenommen, L wäre kontextfrei. Dann können wir das PL für kontextfreie Sprachen anwenden.
- Sei $n \in \mathbb{N}$ eine PL-Zahl für L.
- Wähle $z = z_1\#z_2 = a^n b^n \# a^n b^n$. Offensichtlich is $|z| \geq n$ und $z \in \mathsf{L}$.
- Nach PL gibt es eine Zerlegung $z = uvwxy$ mit 1. $vx \neq \varepsilon$, 2. $|vwx| \leq n$ und 3. $\forall i \in \mathbb{N}. uv^iwx^iy \in \mathsf{L}$.
-
  - Fall 1: v oder x enthält $\#$
    Dann enthält uv^2wx^2y zwei $\#$ und ist damit nicht in L.
  - Fall 2: vwx befindet sich vollständig in z_1
    Dann gilt für uv^2wx^2y wegen $vx \neq \varepsilon$ dass der Teil vor dem $\#$ länger ist als der Teil danach, woraus folgt dass das Wort nicht in L ist.
  - Fall 3: vwx befindet sich vollständig in z_2
    Dann gilt die selbe Begründung wie im letzten Fall für uv^0wx^0y.
  - Fall 4: v liegt in z_1 und x liegt in z_2
    Da $|vwx| \leq n$ gilt kann v nur b's und x nur a's enthalten. Damit gilt für uv^2wx^2y dass der Teil vor dem $\#$ mehr als n b's enthält, womit das Wort nicht in L ist.
- Also haben wir einen Widerspruch zur Annahme hergeleitet und somit ist L nicht kontextfrei.

b)* Geben Sie eine unendliche Menge von Myhill–Nerode Äquivalenzklassen für die Sprache L an. Es reicht hierbei aus, für jede Klasse jeweils einen Repräsentanten anzugeben. Zeigen Sie außerdem, dass die Klassen paarweise verschieden sind.

0
1
2

$$\{[a^n\#] \mid n \in \mathcal{N}\}$$

Seien i, j beliebig mit $i \neq j$. Sei o.b.d.A. $i > j$. Dann ist a^j ein unterscheidendes Suffix für $[a^i\#]$ und $[a^j\#]$, da $a^j\#a^j \in L$ aber $a^i\#a^j \notin L$. (Da der Teil vor dem # länger ist als der Teil danach)

Aufgabe 6 Kontextfreie Sprachen (2) (6 Punkte)

0 1 2 3 4 5 6

Wir betrachten die Sprache $\mathsf{L} = \{\mathsf{a}^k\mathsf{b}^k \mid k \geq 0\}$ und die Grammatik $G = (\{S\}, \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}, P, S)$ mit den folgenden Produktionen P:

$$S \to \varepsilon \mid \mathsf{a}S\mathsf{b}$$

Zeigen Sie, dass G genau die Sprache L produziert, also $\mathsf{L}(G) = \mathsf{L}$.

Wir zeigen zuerst $\mathsf{L}(G) \subseteq \mathsf{L}$. Sei $w \in \mathsf{L}(G)$. Damit $S \to^* w$. Wir zeigen $\exists k \geq 0.\, w = \mathsf{a}^k\mathsf{b}^k$ mittels Induktion über die Ableitung von w.

Die einzige Induktionsbasis ist das leere Wort. Dieser Fall is offensichtlich.

Für den Induktionsschritt nehmen wir an $S \to^{n+1} w$. Die Induktionshypothese gilt für alle $m \leq n$, d.h. $\forall m \leq n.\, \forall w'.\, S \to^m w' \longrightarrow \exists k \geq 0.\, w = \mathsf{a}^k\mathsf{b}^k$. Wir betrachten den ersten Schritt der Ableitung: Es gilt $S \to \mathsf{a}S\mathsf{b} \to^n \mathsf{a}u\mathsf{b}$ mit $w = \mathsf{a}u\mathsf{b}$ und $S \to^n u$. Dann gibt es nach Induktionshypothese ein $k \geq 0$ mit $u = \mathsf{a}^k\mathsf{b}^k$. Damit gilt $w = \mathsf{a}^{k+1}\mathsf{b}^{k+1}$ mit $k+1 \geq 0$.
Damit haben wir $w \in \mathsf{L}$ gezeigt.

Sei weiterhin $w \in \mathsf{L}$, also $w = \mathsf{a}^k\mathsf{b}^k$ für ein $k \geq 0$. Wir zeigen $S \to^* \mathsf{a}^k\mathsf{b}^k$ per Induktion über k.

Basisfall: $S \to \varepsilon = \mathsf{a}^0\mathsf{b}^0$.

Induktionsschritt von k nach $k+1$. Die Induktionshypothese ist $S \to^* \mathsf{a}^k\mathsf{b}^k$.
Zu zeigen: $S \to^* \mathsf{a}^{k+1}\mathsf{b}^{k+1}$. Es gilt:

$$\begin{aligned} S \to{} & \mathsf{a}S\mathsf{b} & \\ \to^*{} & \mathsf{a}\mathsf{a}^k\mathsf{b}^k\mathsf{b} & \text{(IH)} \\ ={} & \mathsf{a}^{k+1}\mathsf{b}^{k+1} & \end{aligned}$$

Damit haben wir $w \in \mathsf{L}(G)$ gezeigt.

Aufgabe 7 Unabhängige Knotenmenge (8 Punkte)

In einem beliebigen ungerichteten Graph $G = (V, E)$ nennen wir eine Knotenmenge $S \subseteq V$ unabhängig, falls keine zwei Knoten aus S eine Kante aus E bilden. Wir betrachten das Entscheidungsproblem UK:
Gegeben: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine natürliche Zahl k.
Zu entscheiden: Gibt es eine unabhängige Teilmenge von Knoten $S \subseteq V$ mit $|S| \geq k$?

a)* Zeigen Sie, dass UK $\in$ NP.

Als Zertifikat dient die Knotenmenge S. Wir können in polynomieller Zeit in $|V| + |E|$ überprüfen, ob die folgenden Eigenschaften gelten:

- $S \subseteq V$
- $|S| \geq k$
- S ist unabhängig

b)* Zeigen Sie, dass UK NP-schwer ist, indem Sie eine polynomielle Reduktion von 3KNF-SAT auf UK angeben und deren Korrektheit beweisen. Führen Sie Ihre Reduktion auch explizit für die Formel $(x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3)$ durch.
Hilfestellung: Verwenden Sie genau einen Knoten für jedes Vorkommen eines Literals in jeder Klausel (also höchstens $3m$ Knoten bei m Klauseln).

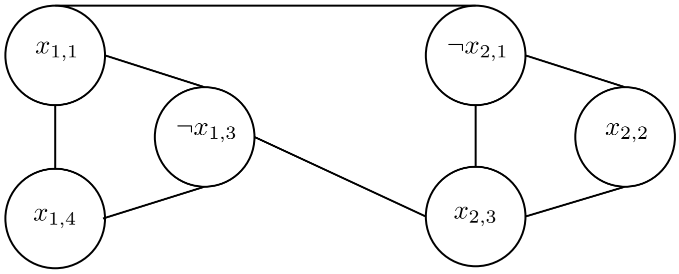
Wir bezeichnen Literale $\neg x_i$ und x_i als komplementär. Gegeben seien m Klauseln $c_1, \dots, c_m$. Die Literale von c_i seien mit $l_{i,j}$ für $j \in \{1, 2, 3\}$ bezeichnet (nicht alle davon müssen für jede Klausel existieren).

Wir definieren die Reduktion f, die eine Probleminstanz für UK folgendermaßen konstruiert. Wir fügen in E zunächst ein "Dreieck" $\{\{l_{i,1}, l_{i,2}\}, \{l_{i,2}, l_{i,3}\}, \{l_{i,3}, l_{i,1}\}\}$ für jede Klausel c_i hinzu, um sicherzustellen, dass genau ein Literal pro Klausel ausgewählt wird. Nun fügen wir noch eine "Konfliktkante"' für jedes Paar aus komplementären Literalen hinzu. Setze $k := m$ und $V := \bigcup E$.

Die Reduktion f ist offensichtlich in polynomieller Zeit berechenbar.

Korrektheit: Sei σ eine erfüllende Belegung der Variable in $c_1, \dots, c_m$. Dann gibt es mindestens ein Literal $l_{i,j}$ mit $\sigma(l_{i,j}) = 1$ für alle $1 \leq i \leq m$. Sei S eine Knotenmenge, die aus genau einem solchen Literal für jede Klausel besteht. Offensichtlich gelten $|S| = k$ und $S \subseteq V$. S ist auch unabhängig: keine Kante aus den Dreiecken wird vollständig abgedeckt, da wir nur ein Literal pro Klausel auswählen. Es wird auch keine Konfliktkante vollständig abgedeckt, da σ nur eines der Literale auf einer solchen Kante auf 1 setzen kann.
Sei $S \subseteq V$ unabhängig mit $|S| \geq k$. S muss genau einen Knoten pro Dreieck enthalten, also $|S| = k$. Wir konstruieren nun eine Belegung σ, die $\sigma(l_{i,j}) = 1$ für alle $l_{i,j} \in S$ setzt. Das ist wohldefiniert, da aufgrund der Konfliktkanten nie zwei komplementäre Literale in V enthalten sein können. Zudem ist σ erfüllend, da wir mindestens ein Literal pro Klausel auf 1 gesetzt haben.

Beispiel: Setze $k := 2$. Es ergibt sich der folgende Graph:



Aufgabe 8 Quiz 2: Berechenbarkeit und Komplexität (9 Punkte)

a)* Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob diese korrekt ist oder nicht. Begründen Sie jeweils *kurz*. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet. Falls eine Aussage nicht gilt, geben Sie (soweit angebracht) entsprechende Gegenbeispiele an. Antworten wie „Ja, siehe Vorlesung“ sind ohne weiteren Kontext *nicht* ausreichend.

1. Die Sprache $A := \{w \mid \varphi_w = \chi_{H_0}\}$ ist entscheidbar. Wie aus der Vorlesung bekannt bezeichnet dabei φ_w die von der durch w kodierten Turingmaschine berechnete Funktion, und χ_{H_0} die charakteristische Funktion von H_0.
2. Der Wertebereich $\{y \in \Sigma^* \mid \exists x \in \Sigma^*.\ y = f(x)\}$ einer berechenbaren Funktion f ist semi-entscheidbar.
3. Für jedes Problem A in P gilt $A \leq_{\mathsf{p}} \mathsf{SAT}$.
4. Jede unentscheidbare Sprache hat eine unentscheidbare echte Teilmenge.
5. Sei $A \subseteq \Sigma^*$ eine reguläre Sprache. Dann ist A in deterministisch-linearer Zeit entscheidbar, d.h. es gibt eine DTM M mit $L(M) = A$ und Konstanten $a, b > 0$ mit $\forall w \in \Sigma^*.\ \mathrm{time}_M(w) \leq a\,|w| + b$.

Die folgenden Lösungen sind teilweise deutlich ausführlicher als das, was bei der Korrektur einen ganzen Punkt gibt.

1. Korrekt. Da H_0 nicht entscheidbar ist, ist die charakteristische Funktion nicht berechenbar und damit $A = \emptyset$, was trivialerweise entscheidbar ist.
2. Korrekt. Wir bauen eine NTM, die $x \in \Sigma^*$ rät und dann prüft, ob $y = f(x)$ ist. Alternativ: wir simulieren die Maschine, die f berechnet, für jeweils N Schritte auf allen Eingaben x der Länge $\leq N$. Wenn eine dieser Ausführungen y zurückgibt, halten wir; ansonsten erhöhen wir N um 1.
3. Korrekt, da $\mathsf{P} \subseteq \mathsf{NP}$ und SAT NP-schwer ist. Alle Probleme in NP lassen sich per Definition auf ein NP-schweres Problem reduzieren.
4. Korrekt. Sei A eine unentscheidbare Sprache. Dann ist $A \neq \emptyset$, da $\emptyset$ trivialerweise entscheidbar ist. Sei also $x \in A$. Dann ist die echte Teilmenge $A \setminus \{x\}$ auch wieder unentscheidbar, da man aus einem Entscheider für $A \setminus \{x\}$ einen Entscheider für A bauen könnte.
5. Korrekt. Wir nehmen einen DFA, der A akzeptiert, und wandeln diesen um in eine DTM mit den gleichen Zuständen und einem zusätzlichen dedizierten Endzustand. Mit jedem Übergang bewegt die DTM ihren Lese-/Schreibkopf eins nach rechts und geht in den entsprechenden Folgezustand des DFAs über. Zusätzlich fügen wir von jedem Zustand, der in dem DFA ein Endzustand war, eine Transition mit $\Box$ zu dem neuen Endzustand hinzu. Für jedes Eingabewort w macht diese DTM offensichtlich entweder $|w|$ oder $|w| + 1$ Schritte.

b)* Nennen Sie jeweils ein Beispiel für die folgenden Objekte:

1. Eine Sprache, die nicht in NP ist.
2. Eine totale Funktion, die nicht berechenbar ist.
3. Zwei unentscheidbare Sprachen, deren Schnitt entscheidbar ist.
4. Eine Sprache, die nicht Typ 0 in der Chomsky-Hierarchie hat.

Begründen Sie jeweils *kurz*, warum ihr Beispiel diese Eigenschaften hat (nur „laut Vorlesung" ist *nicht* ausreichend). Die Unentscheidbarkeit von aus der Vorlesung als unentscheidbar bekannten Sprachen müssen Sie nicht begründen.

1. H_0, weil sie nicht entscheidbar ist.
2. Die charakteristische Funktion von H_0 (kann nicht berechenbar sein, da H_0 nicht entscheidbar ist). Ist total, da sie per Definition nur die Werte 0 und 1 annimmt.
3. H_0 und $\overline{H_0}$ sind unentscheidbar, aber ihr Schnitt ist die leere Menge, welche trivialerweise entscheidbar ist.
4. Die Typ 0-Sprachen sind laut Vorlesung genau die rekursiv aufzählbaren, also die semi-entscheidbaren. Da K laut Vorlesung semi-entscheidbar, aber nicht entscheidbar ist, ist $\overline{K}$ nicht semi-entscheidbar und damit auch nicht Typ 0.

Zusätzlicher Platz für Lösungen. Markieren Sie deutlich die Zuordnung zur jeweiligen Teilaufgabe. Vergessen Sie nicht, ungültige Lösungen zu streichen.

Lösungsvorschlag